## Groupe A

# DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa métrique euclidienne usuelle, notée $\|.\|$. Pour les applications linéaires entre espaces vectoriels euclidiens, on utilisera la norme définie par :

$$\|f\| = \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\|$$

Soit P une partie de $\mathbb{R}^n$ et A et B deux points de P. Dans ce problème, on appelle chemin de A à B contenu dans P toute application F d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, continûment différentiable et vérifiant :

$$F(a) = A, \quad F(b) = B, \quad F([a, b]) \subset P.$$

On appelle longueur de F le nombre :

$$l(F) = \int_a^b \|F'(t)\| \, dt$$

Si $g$ est une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on note $d_x g$ sa différentielle au point $x$.

## I

1° Soit F comme ci-dessus avec $n = 1$. Démontrer l'inégalité :

$$l(F) \geqslant \|B - A\|$$

2° Soit F un chemin contenu dans P, et $g$ une application continûment différentiable d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant P dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que si pour tout $x$ dans P, on a $\|d_x g\| \leqslant M$, alors :

$$l(g \circ F) \leqslant M \, l(F)$$

3° Montrer que si F est un chemin de A à B, avec $n > 1$, alors :

$$l(F) \geqslant \|B - A\|$$

## II

Dans le reste du problème, P désigne une partie de $\mathbb{R}^n$, variable selon la question, dont on suppose qu'elle a la propriété suivante : Si A et B sont deux points quelconques de P, il existe un chemin de A à B contenu dans P.

On note $D_P(A, B)$ la borne inférieure de l'ensemble parcouru par $l(F)$ lorsque F décrit l'ensemble des chemins de A à B contenus dans P.

1° Soient $u$, $v$, $w$ trois nombres réels vérifiant $u < v < w$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi$ continûment dérivable sur [0,1] vérifiant :

$$\varphi(0) = u, \qquad \varphi(1) = w, \qquad \varphi'^{-1}\{0\} = \varphi^{-1}\{v\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

2° Montrer que $D_P$ est une distance sur P vérifiant les propriétés suivantes :

*a.* $D_P(A, B) \geqslant \|A - B\|$.

*b.* Si le segment [A, B] est contenu dans P, alors $D_P(A, B) = \|A - B\|$.

*c.* Soient $a = t_0 < t_1 \ldots < t_N = b$ des réels et F un chemin contenu dans P, défini sur $[a, b]$. Alors :

$$l(F) \geqslant \sum_{i=1}^{N} D_P(F(t_{i-1}), F(t_i)).$$

.../...

ENS SEVRES ET ULM 1980

*d.* Si $\{A, B\} \subset P' \subset P$, alors $D_P(A, B) \leqslant D_{P'}(A, B)$.

3° Donner l'exemple d'une partie P et de deux points A et B dans P, tels que $D_P(A, B)$ ne soit pas la longueur d'un chemin de A à B contenu dans P.

## III

Dans cette partie, on pose :

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leqslant x^2\}, \quad \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\},$$
$$\text{et} \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \quad \text{ou} \quad 2y < 1\}.$$

1° Calculer $D_\Gamma((a, a^2), (b, b^2))$.

2° Soit A un point de U. Montrer qu'il existe un unique point $g(A)$ de $\Gamma$ tel que A soit sur la normale en $g(A)$ à $\Gamma$ et que les abscisses de A et $g(A)$ soient de même signe ($\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$).

3° Montrer que l'application $g$ ainsi définie est continûment différentiable, et calculer sa différentielle en A en fonction des coordonnées de A et $g(A)$.

4° Calculer la norme de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$ et en déduire que pour A dans P :

$$\| d_A g \| \leqslant 1.$$

5° Calculer $D_P((-1,0), (3,5))$.

## IV

Dans cette partie, P est le graphe d'une fonction $f$ définie et continûment dérivable sur un intervalle ouvert I. On note $E_P$ la restriction à $P \times I'$ de la distance euclidienne.

1° Montrer que si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $D_P$ n'est pas équivalente $E_P$ (c'est-à-dire, il n'existe pas $c > 0$ tel que $\frac{1}{c} E_P \leqslant D_P \leqslant c E_P$).

**Tournez la page S. V. P.**

2° Montrer que si $x$ et $m$ sont des réels vérifiant $x \geqslant m$, ils vérifient aussi

$$\sqrt{1 + x^2} \leqslant 1 + x + 2|m|.$$

3° Caractériser les polynômes $f$ pour lesquels $D_P$ et $E_P$ sont équivalentes.

4° Soit $\alpha > 0$, $I = ]0,1[$, $f(x) = x \sin(x^{-\alpha})$. Pour quelles valeurs de $\alpha$, $D_P$ est-elle bornée?

## V

Calculer $D_P(A, B)$ dans les cas suivants :

1° $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad y \geqslant 0\}$, $A = (1, -7, -2)$, $B = (-9, 3, -1)$.

2° $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad y \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad z \geqslant 0\}$, $A = (1, -7, -2)$, $B = (-9, 3, -1)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail